

Mengenalgebra (= Operationen mit Mengen)

Def 1.2 (eigentlich Axiom, man muss fordern, dass die Mengen rechts von $:=$ existieren)

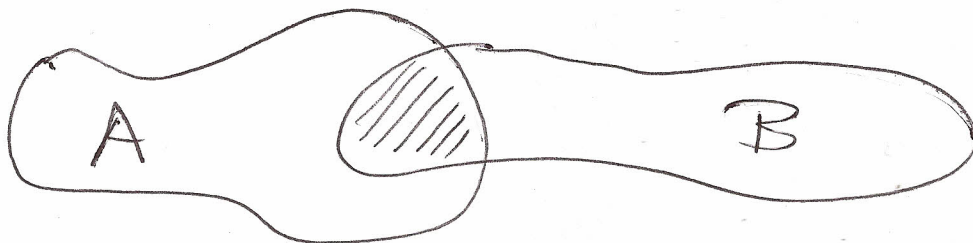
Seien A, B Mengen.

i) Vereinigung

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

ii) Durchschnitt

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

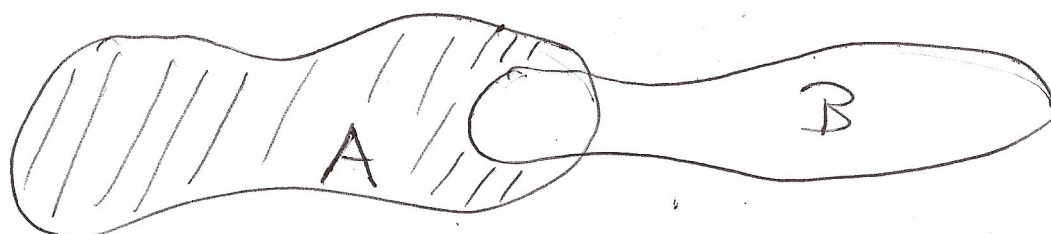


Venn Diagramm

A und B disjunkt : $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

iii) Differenz, Komplement von B in A

$$A - B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Man überlege sich :

1. Kommutativgesetz

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

2. Assoziativgesetz

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

sowie

$$4. (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) = A \cap (B - C),$$

$$5. (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C),$$

$$6. A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$

$$7. A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Regeln von De Morgan.

Verallgemeinerung:

(auf Mengen-
systeme) - 25-

I = Indexmenge, z.B. $\mathbb{N}$,

für jeden Index $\alpha \in I$ sei eine Menge

A_α gegeben

(Vereinigung der A_α)

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \text{ liegt in mindestens einer Menge } A_\alpha\}$$

Beispiel: $I = \mathbb{N}$

dann schreibt man $\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$;

ist $A_\alpha = \{\alpha\}$, so gilt

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha = \mathbb{N}$$

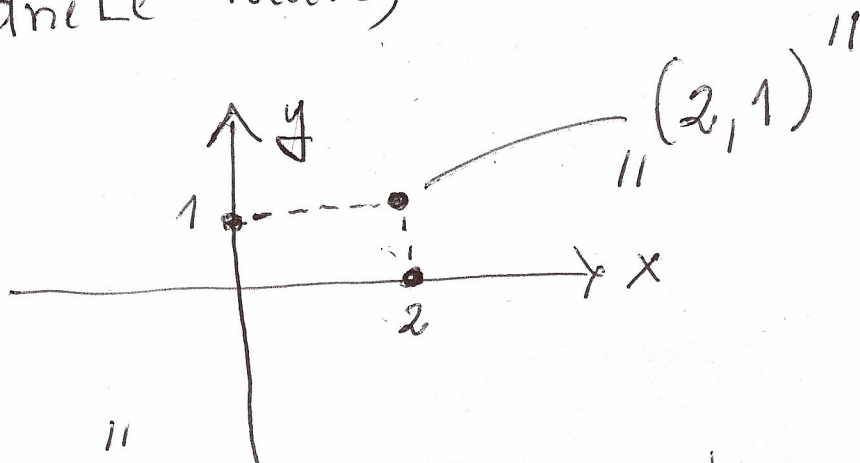
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x: x \text{ liegt in } \underline{\text{allen}} A_\alpha\}$$

(Durchschnitt der A_α)

$$I = \mathbb{N}; \quad \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$$

Bspl.: $I = \mathbb{N}, A_\alpha = \{\alpha\} \Rightarrow \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha = \emptyset$

Geordnete Paare, Kartesische Produkte:



mit $\{1, 2\}$ kommt man nicht weiter,
da die Reihenfolge egal ist

-27-

Vorstellung: gegeben zwei math. Objekte
 a und b ; man fasst diese zu
einem geordneten Paar (a, b)

Zusammen,

$a = 1^{\text{te}}$ Komponente,

$b = 2^{\text{te}}$ Komponente

Forderung:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ und } b = d$$

(also genau das, was man ^{von} Koordinaten
haben möchte!)

Wie setzt man das um?

Vorschlag:

$$(a,b) := \{ \{a\}, \{a,b\} \}$$

man versuche mit unseren Axiomen
zu beweisen

Satz: $(a,b) = (c,d) \implies a=c, b=d.$

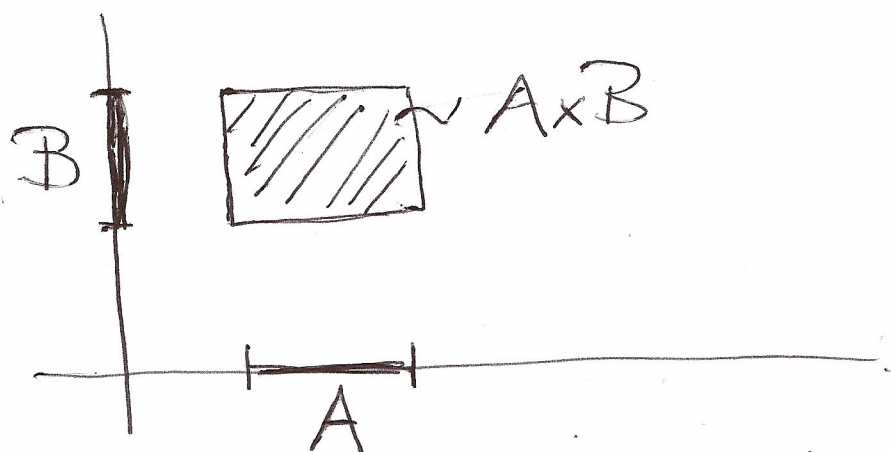
Def. 1.3: Für Mengen A, B heißt

$$A \times B := \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$$

das Kartesische Produkt von A mit B .

(Reihenfolge! $A \times B \neq B \times A$
im allgemeinen!)

Bild dazu:



- Regeln:
- 1.) $\emptyset \times B = A \times \emptyset = \emptyset$
 - 2.) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
 - 3.) $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$
 - 4.) --- analog für $\cap$ ---

endliche Verallgemeinerung:

$$(a, b, c) := (a, (b, c)),$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := \dots$$

Abbildungen :

sind formal spezielle Teilmengen kartesischer Produkte (das sollte man schnell vergessen, dient nur der Definition);

werden auch Funktionen genannt
(Konvention: das Wort Funktion ist für Abbildungen zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ typisch);

werden so beschrieben

Eine Abbildung f von der Menge A in die Menge B ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet.

Notationen:

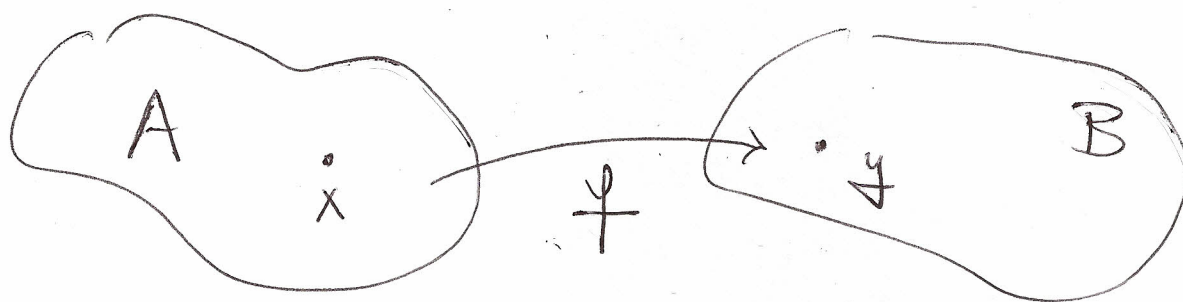
$$f: A \rightarrow B, \quad y = f(x) \quad \text{oder}$$

$$f: A \ni x \mapsto f(x) \in B;$$

A = Definitionsbereich,

B = Bildbereich,

y = Bildpunkt von x unter f



entscheidende Forderung: einem $x \in A$

können nicht zwei verschiedene Punkte

$y_1 \neq y_2$ in B zugeordnet werden! Aber:

(nicht jedes $y \in B$ muss als Bild vorkommen)

also -32-

Abbildungen werden [✓] beschrieben durch

Angabe von 3 Daten,

Definitionsbereich A ,
Bildbereich B ,
Vorschrift $y = f(x)$

das Bild von f ist die Menge

$$\text{Bild}(f) := f(A) := \{f(x) : x \in A\} \\ \subset B \quad (\neq \text{i. a.} !)$$

Beispiel : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$

hier : $A = B = \mathbb{R}$ und

$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \subsetneq \mathbb{R}$$

nun zur exakten Definition („bitte vergessen“)

Def 1.4 : A, B seien Mengen.

Eine Abbildung f von A nach B

ist eine Teilmenge

$$f \subset A \times B$$

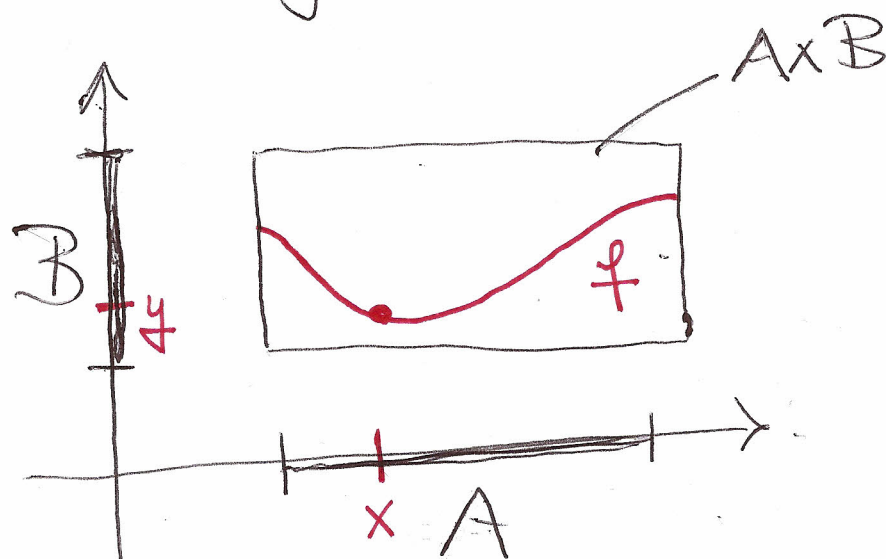
mit der Eigenschaft:

Zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein
 $y \in B$ mit $(x, y) \in f$.

Man schreibt $y = f(x)$.



Veranschaulichung:



gezeichnet: $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B,$

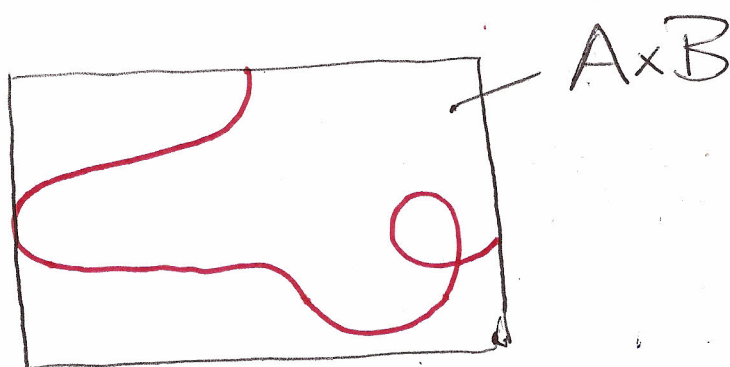
das ist der Graph von f aus

der Schulmathematik;

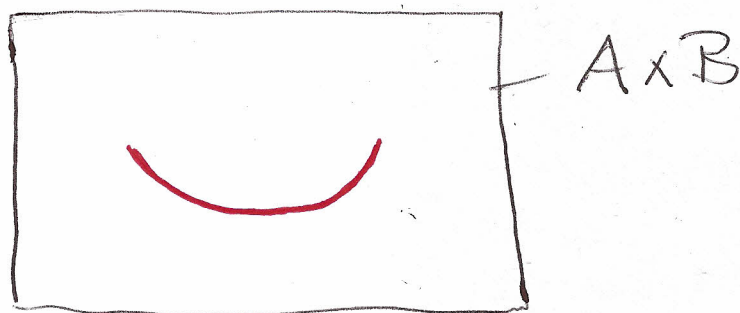
nach Def 1.4 ist die Abbildung f
genau dieser Graph !!

Weshalb sind die folgenden
Teilmengen ~~Teil~~ von $A \times B$
keine Abbildungen (Graphen)?

①



②



- ①: über manchen x liegen mehrere y .
- ②: es gibt x , über denen kein y liegt

Empfehlung: Def. nicht überbewerten! ^a-35-

denke anschaulich im Sinne einer

Zuordnung $x \mapsto f(x)$

Wichtige Klassen von Abbildungen:

Def 1.5 : Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung.

a) f injektiv : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \text{ aus } A \implies \\ f(x_1) \neq f(x_2) \end{array} \right\}$

(bzw: aus $f(x) = f(\tilde{x})$ folgt $x = \tilde{x}$)

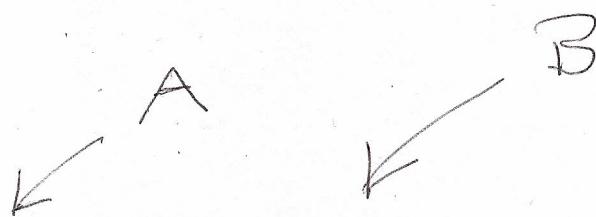
b) f surjektiv : $B = \text{Bild}(f)$

c) f bijektiv : $\Leftrightarrow$

f injektiv und surjektiv

Achtung: diese Eigenschaften hängen nicht ~~nur~~ nur von der "Formel" $y = f(x)$ ab sondern auch von den zu ~~f~~ f gehörenden Mengen A, B !

Beispiel:



1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\},$
 $f(x) := x^2$

surjektiv, nicht injektiv

$$2) \quad f: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\},$$

$$f(x) := x^2 \quad \underline{\text{bijektiv}}$$

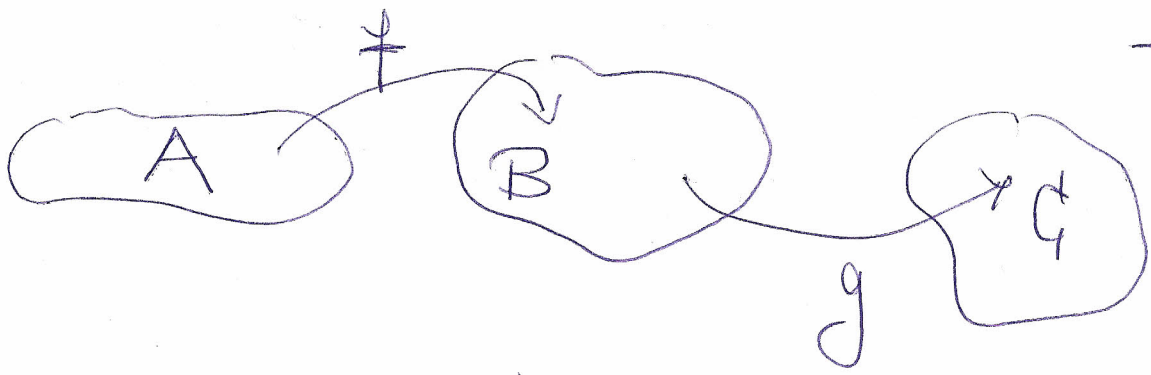
$$3) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$$

weder injektiv noch surjektiv

In allen drei Fällen hat man dieselbe
Formel, Definitions- und Bildbereich
ändern sich aber! 

Notationen:

① Verkettung: Seien $f: A \rightarrow B$
und $g: B \rightarrow C$ Abbildungen.



$$g \circ f: A \rightarrow C,$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

② Urbild: Sei $f: A \rightarrow B$

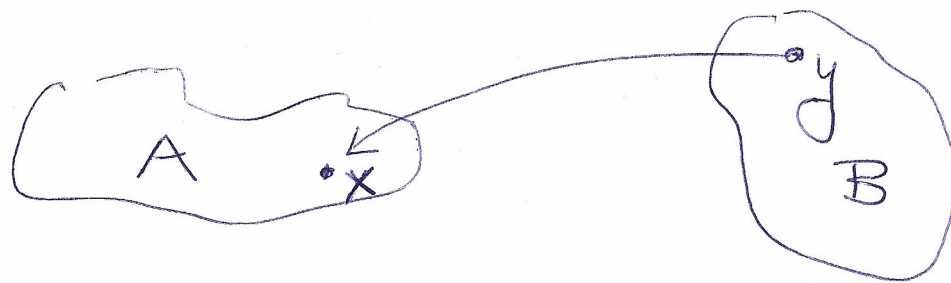
und $\tilde{B} \subseteq B$. Dann heißt

$$f^{-1}(\tilde{B}) := \{x \in A: f(x) \in \tilde{B}\}$$

das Urbild von $\tilde{B}$ unter f .

③ Umkehrabbildung

Sei $f: A \rightarrow B$ bijektiv



$\Rightarrow$ Zu jedem $y \in B$ gehört genau ein $x \in A$
mit $f(x) = y$.

Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\rightarrow A, \\ f^{-1}(y) &:= x \end{aligned}$$

offenbar gilt für Teilmengen B' von B :

Urbild von B' unter $f =$

Bild von B' unter f^{-1} .



§2 Die Zahlbereiche

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;

Konstruktion nach von Neumann 1923:

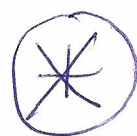
$1 := \{\emptyset\}$ (Menge mit einem Element),

$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (— — — zwei — — —),

$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

allgemein:

$$\boxed{n+1 := n \cup \{n\}}$$



"-41-

auf $\mathbb{N}$ existieren die „Operationen“

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m + n,$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m \cdot n$$

genannt Addition und Multiplikation

mit den üblichen Gesetzen. In $(*)$

steht ansatzweise, wie man „+“
erklärt, wir verzichten auf Details.

auf $\mathbb{N}$ gibt es eine Ordnungsrelation
„ $<$ “ („kleiner“) wie folgt:

$$\boxed{n < n+1}$$

- für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

entweder $n < m$ oder $n = m$ oder $m < n$
 (Vergleichbarkeit)

Die üblichen Notationen :

$$\begin{cases} m \leq n : \Leftrightarrow m = n \text{ oder } m < n; \\ m > n : \Leftrightarrow n < m, \text{ usw.} \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen der Ordnungs-
 relation und der algebraischen Struktur:

$$m < n \Rightarrow \begin{cases} m+k < n+k, \\ mk < nk \end{cases}$$

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N}$$